Convergencia de la Función Z de Riemann

La Conjetura de Riemann es Falsa!
(Cálculos en Lenguaje Go)

Horacio Useche Losada
Software Developer
horaciouseche@gmail.com

"Talento es lo que posee un hombre. Genio es lo que posee al hombre!"
Proverbio chino

Descargue este documento desde:
Horacio Useche Facebook Page

Julio 5 de 2017

Diagramación en LaTeX realizada por el autor bajo Linux Fedora

Índice

Resumen

La conjetura de Riemann es falsa. Los ceros de la función $\zeta(s)$ están ubicados en el intervalo $0{,}45 \leq \Re(s) < 1{,}2$. Las rectas principales con existencia de infinitos ceros son $\Re(z) = 0{,}5$ y $\Re(z) = 1$, pero a lado y lado de estas dos rectas aparecen otras rectas con infinitos ceros aunque con menor densidad de soluciones.

Abstract

The Riemann conjeture is false. The Riemann's zero are place on $0{,}45 \leq \Re(s) < 1{,}2$ interval. The main straight line with infinite Riemann's zero are $\Re(z) = 0{,}5$ and $\Re(z) = 1$, but on side to side of the two lines defined by $\Re(z) = 0{,}5$ and $\Re(z) = 1$, there are others lines with infinite Riemann's zero, though with minor density of solutions.

1. Introducción

En mi primer trabajo (ver [10]) sobre esta función, analizamos la convergencia de $\zeta(s)$ para $s > 1$ y $s \in \Re$. Es decir, he obviado las dificultades que introduce la variable compleja para concentrar el esfuerzo en el cómputo de la función en variable real.

En esta oportunidad, retomamos el análisis en variable compleja para $\zeta(s)$. Lo primero será encontrar una versión de $\zeta(s)$ que sea computable, dado que la expresión $\zeta(s) = \frac{1}{n^s}$, con $s \in \mathbb{C}$ no es computable. Resulta difícil de creer, pero la literatura existente sobre el tema, se enfoca básicamente al análisis funcional en torno a $\zeta(s)$ y se olvida, un poco, de la computación de la función en cuestión y por ello, he tenido que derivar en primer lugar, una versión computable para $\zeta(s)$.

Armados con esta herramienta, procedemos a formular los criterios de convergencia de $\zeta(s)$, analizando los diferentes casos que se pueden esperar, esto es,

$s > 1$	Converge
$s = 1$	Existencia de un polo
$0 < s < 1$	Extensión analítica

Para cada uno de los casos revisados, introducimos al menos una rutina de cómputo, en lenguaje Go, que nos permita ilustrar el fenómeno que presenta

la situación expuesta, al fin de cuentas, este es un trabajo sobre cálculo matemático y no una demostración de la conjetura de Riemann, que resultó ser falsa como veremos posteriormente en la sección 5.

La escogencia de Go como lenguaje de cómputo se debe a varias razones, que me permito discriminar:

- Porque es el lenguaje más rápido que existe y la velocidad es un factor crítico aquí.
- Porque es un lenguaje nuevo, prácticamente ignorado por los académicos, al menos, en Colombia.
- Porque es un lenguaje gratuito, de código abierto, soportado por Google, y es fascinante.
- Porque me niego a usar Mathematica en mis trabajos y a seguirle la "cuerda"a los de la Wolfram Research y su dependencia tecnológica.
- Además, porque deseo que cualquiera que se tome el trabajo de verificar los cálculos, lo pueda hacer sin tener que comprar una licencia de Mathematica o cualquier otra herramienta de software que lo obligue.

Los algoritmos Go, se entregan pero no se explican, pues la ingeniería de software asociada con ellos no es el objeto de esta investigación.

Importante mencionar que, los resultados que se entregan se consiguen partiendo de ceros, es decir, no se han usado resultados anteriores de ningún otro autor, diferentes al enunciado mismo de la conjetura de Riemann.

2. La Función Z de Riemann

Sea dada la función Z de Riemann, definida como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

donde $s \in \mathbb{C}$. Con $s = a + bi$ se tiene:

$$\frac{1}{n^s} = n^{-(a+bi)} = n^{-a} n^{-bi}$$
$$\frac{1}{n^s} = n^{-a} e^{\ln n^{-bi}} = n^{-a} e^{-bi \ln n} = n^{-a} e^{i(-b \ln n)}$$

haciendo $\theta = -b \ln n$, y sabiendo que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{1}{n^s} = n^{-a} e^{i\theta} = n^{-a}[\cos\theta + i \sin\theta]$$
$$\frac{1}{n^s} = n^{-a}[\cos(-b \ln n) + i \sin(-b \ln n)]$$

ahora, puesto que $cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, se tiene:

$$\frac{1}{n^s} = n^{-a}\cos(b \ln n) - i n^{-a}\sin(b \ln n)$$
$$\frac{1}{n^s} = \frac{\cos(b \ln n)}{n^a} - i\frac{\sin(b \ln n)}{n^a}$$

introduciendo la sumatoria de la ecuación 1, podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(b \ln n)}{n^a} - i\frac{\sin(b \ln n)}{n^a} \right)$$

finalmente, por una propiedad de las sumatorias, se llega a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b \ln n)}{n^a} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b \ln n)}{n^a} \tag{2}$$

la ecuación 2 puede ser usada para calcular la serie en 1 y buscar los denominados “ceros de Riemann”, para los cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b \ln n)}{n^a} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b \ln n)}{n^a} = 0 \tag{3}$$

desde 3 se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(b \ln n)}{n^a} = 0$ y similarmente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b \ln n)}{n^a} = 0$.

2.1. La extensión analítica de $\zeta(s)$

La ecuación 1 es válida para $Re(s) > 1$, por lo que, se necesita una expresión de 1 que pueda converger para $0 < Re(s) < 1$. A dicha expresión se le denomina la **extensión analítica de** $\zeta(s)$ y se define como:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{4}$$

la ecuación 4 contiene un término $\frac{1}{1-2^{1-s}}$ que complicaría bastante las cosas de no ser por el hecho de que no se requiere para la convergencia de los ceros de la función $\zeta(s)$. Esto obedece al hecho que el término en cuestión es constante en la ecuación 4 y por tanto no influye en la nulidad de la ecuación. Con estas debidas aclaraciones, la expresión 4 se puede escribir como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(b\ln n)}{n^a} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(b\ln n)}{n^a} \tag{5}$$

que es la forma computable a usar en esta investigación y en donde, como lo he aclarado anteriormente y para los propósitos buscados aquí, podemos prescindir del término $\frac{1}{1-2^{1-s}}$.

3. La Convergencia de $\zeta(s)$

3.1. Caso $Re(s) > 1$

Para estudiar lo que sucede en este caso, nos remitimos a la ecuación 2. Es decir, la expresión para $\zeta(s)$ sin su extensión o continuidad analítica. En este caso, sabemos que 2 converge para $s > 1$ y para verlo de cerca, considere el siguiente algoritmo.

3.1.1. Algoritmo use_riem_01

```
func Riemann_cmp(precision int,p_real,p_img float64){
 var n,i int
 var a,b,ang,sen,cos,pr float64
 var fre,fcmp,cmp,re,sumac,sumar float64
 fmt.Println("=========Función Riemann Compleja ===========")
 fmt.Println("Imprime la serie 1+ 1/2^k+1/3^k+ ...+1/n^k,
                                          para k un complejo")
 fmt.Printf("Tiempo antes de ejecutar: %v \n",time.Now())
 n=precision
 a=p_real
 b=p_img
 sumar=0
 sumac=0
 for i=1;i<=n;i++{
```

```
 ang=b*math.Log(float64(i))
 sen=math.Sin(ang)
 cos=math.Cos(ang)
 pr=math.Pow(float64(i),a)
 fre=cos/pr
 fcmp=sen/pr
 re=fre+sumar
 cmp=fcmp+sumac
 fmt.Printf("I= %d real: %g complex: %g\n",i,re,cmp)
 sumar=re
 sumac=cmp
 }
 fmt.Printf("Tiempo después de ejecutar: %v \n",time.Now())
}
```

La función `Riemann_cmp()`, se ejecuta con la ayuda de una función `main()` de la siguiente forma

```
func main() {
 var precision int
 var p_real,p_img float64
 precision=10000000
 p_real=1.5
 p_img=10.3
 Riemann_cmp(precision,p_real,p_img)
}
```

en la función `main()` se puede apreciar como $Re(s) = 1{,}5$ y se realizan una sumatoria sobre un millón de términos[1] para evaluar la convergencia de la serie en 1.

La salida completa del ejercicio no es posible mostrarla debido a su extensión. En su lugar se ilustra la salida de las últimas 25 líneas en la consola estándar

```
I=999975 re: 1.2629451955252327 imag: 0.15253658713664325
I=999976 re: 1.2629451949256487 imag: 0.15253658633628642
I=999977 re: 1.2629451943260739 imag: 0.1525365855359246
```

[1]Variable precision en el algoritmo.

```
I=999978 re: 1.2629451937265082 imag: 0.1525365847355578
I=999979 re: 1.2629451931269515 imag: 0.15253658393518604
I=999980 re: 1.2629451925274042 imag: 0.1525365831348093
I=999981 re: 1.262945191927866 imag: 0.1525365823344276
I=999982 re: 1.262945191328337 imag: 0.1525365815340409
I=999983 re: 1.262945190728817 imag: 0.15253658073364923
I=999984 re: 1.262945190129306 imag: 0.1525365799332526
I=999985 re: 1.2629451895298043 imag: 0.15253657913285099
I=999986 re: 1.2629451889303118 imag: 0.15253657833244438
I=999987 re: 1.2629451883308285 imag: 0.1525365775320328
I=999988 re: 1.2629451877313542 imag: 0.15253657673161627
I=999989 re: 1.262945187131889 imag: 0.15253657593119477
I=999990 re: 1.262945186532433 imag: 0.1525365751307683
I=999991 re: 1.2629451859329863 imag: 0.15253657433033682
I=999992 re: 1.2629451853335487 imag: 0.15253657352990038
I=999993 re: 1.2629451847341202 imag: 0.15253657272945897
I=999994 re: 1.2629451841347008 imag: 0.1525365719290126
I=999995 re: 1.2629451835352905 imag: 0.15253657112856125
I=999996 re: 1.2629451829358893 imag: 0.15253657032810491
I=999997 re: 1.2629451823364974 imag: 0.1525365695276436
I=999998 re: 1.2629451817371147 imag: 0.15253656872717733
I=999999 re: 1.262945181137741 imag: 0.15253656792670608
I=1000000 re: 1.2629451805383765 imag: 0.15253656712622987
Tiempo después de ejecutar: 2017-05-21 14:51:28.3046201 -0500
```

donde se observa que despues de un millon de iteraciones la serie converge a $Re(s) = 1{,}26294518$ y $Imag(s) = 0{,}1525365$. Claramente, este es el comportamiento ordinario de la ecuación 1 para $s > 1$, es decir, una convergencia típica, donde además $\zeta(s)$, es analítica en la región considerada.

3.2. Caso $s = 1$

Nos limitamos a decir que, en este caso, la función $\zeta(s)$ posee un polo simple en $s = 1$ de residuo igual a 1.

3.3. Caso $0 < Re(s) < 1$

En este caso si evaluamos 1, por ejemplo, para $Re(s) = 0{,}5$ y $Imag(s) = 10{,}3$ se observa que la función no converge, como se puede apreciar en la siguiente salida, obtenida después de diez millones de iteraciones

```
I=991003 re: -73.08429226631614 imag: 61.472730311215976
I=991004 re: -73.08496647510914 imag: 61.471985650107754
I=991005 re: -73.0856406758223 imag: 61.4712409823679
I=991006 re: -73.08631486845559 imag: 61.47049630799651
 .
 .
 .
I=999997 re: -78.81479813815487 imag: 54.5185409587966
I=999998 re: -78.81539751976084 imag: 54.51774049412503
I=999999 re: -78.81599689282228 imag: 54.5169400236801
 .
 .
 .
I=9999995 re: 132.02025846068926 imag: 277.73604962072875
I=9999996 re: 132.01997914977514 imag: 277.7361978956533
I=9999997 re: 132.01969983872223 imag: 277.73634617028273
I=9999998 re: 132.01942052753057 imag: 277.73649444461705
I=9999999 re: 132.01914121620015 imag: 277.73664271865624
I=10000000 re: 132.01886190473098 imag: 277.73679099240036
Tiempo después de ejecutar: 2017-05-21 16:32:20.9620112 -0500
```

el valor de $Re(\zeta(s))$ alterna constantemente de positivo a negativo cambiando su magnitud sin presentar convergencia.

Para logar la convergencia de $\zeta(s)$, debemos usar su extensión analítica expresada en 4, para lo cual presentamos el siguiente algoritmo.

3.3.1. Algoritmo use_riem_02

```
func Riemann_ext(precision int,p_real,p_img float64){
 var n,i int
 var a,b,ang,sen,cos,pr float64
 var fre,fcmp,cmp,re,sumac,sumar float64
 var bas,fac,converg float64
```

```
 fmt.Println("=========Función Riemann Extendida ===========")
 fmt.Println("Imprime la serie 1+ 1/2^k+1/3^k+ ...+1/n^k,
                                         para k un complejo")
 fmt.Printf("Tiempo antes de ejecutar: %v \n",time.Now())
 n=precision
 a=p_real
 b=p_img
 sumar=0
 sumac=0
 bas=-1.0
 converg=0.00001
 for i=1;i<n;i++{
 ang=b*math.Log(float64(i))
 sen=math.Sin(ang)
 cos=math.Cos(ang)
 pr=math.Pow(float64(i),a)
 fac=math.Pow(bas,float64(i-1))
 fre=fac*(cos/pr)
 fcmp=fac*(sen/pr)
 re=fre+sumar
 cmp=fcmp+sumac
 fmt.Printf("I= %d re: %g imag: %g\n",i,re,cmp)
 sumar=re
 sumac=cmp
 if math.Abs(re)<converg && math.Abs(cmp)<converg{
   fmt.Printf("Cero hallado en I= %d real:
                                  %g complex: %g\n",i,re,cmp)
   break
  }
 }
 fmt.Printf("Tiempo después de ejecutar: %v \n",time.Now())
}
```

evaluando de nuevo para $Re(s) = 0{,}5$ y $Imag(s) = 10{,}3$ y usando 100 millones de términos en la sumatoria, se consigue

```
I= 99999980 re: 0.3543164257795648 imag: -1.6235520207715115
I= 99999981 re: 0.3543491464338432 imag: -1.6234575254770065
```

```
I= 99999982 re: 0.3543164257894614 imag: -1.6235520207744092
I= 99999983 re: 0.35434914642394655 imag: -1.6234575254741086
I= 99999984 re: 0.354316425799358 imag: -1.6235520207773069
I= 99999985 re: 0.35434914641404996 imag: -1.623457525471211
I= 99999986 re: 0.35431642580925465 imag: -1.6235520207802048
I= 99999987 re: 0.3543491464041533 imag: -1.6234575254683132
I= 99999988 re: 0.35431642581915124 imag: -1.6235520207831025
I= 99999989 re: 0.3543491463942567 imag: -1.6234575254654156
I= 99999990 re: 0.3543164258290479 imag: -1.6235520207860004
I= 99999991 re: 0.3543491463843601 imag: -1.6234575254625179
I= 99999992 re: 0.3543164258389445 imag: -1.623552020788898
I= 99999993 re: 0.35434914637446346 imag: -1.62345752545962
I= 99999994 re: 0.3543164258488411 imag: -1.6235520207917957
I= 99999995 re: 0.3543491463645668 imag: -1.6234575254567223
I= 99999996 re: 0.35431642585873774 imag: -1.6235520207946934
I= 99999997 re: 0.3543491463546702 imag: -1.6234575254538244
I= 99999998 re: 0.3543164258686343 imag: -1.623552020797591
I= 99999999 re: 0.35434914634477355 imag: -1.6234575254509267
Tiempo después de ejecutar: 2017-05-22 10:15:21.2917839 -0500
```

donde se puede apreciar que $Re(\zeta(s))$ converge a 0.3543 e $Imag(\zeta(s))$ lo hace a -1.623. Es decir, la serie converge, como lo habíamos anticipado, siendo analítica en esta región.

4. Los Ceros de $\zeta(s)$

Los ceros de la ecuación 1 se definen como aquellos valores de s para los cuales la ecuación se anula, esto es,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 0$$

que en realidad, son computables desde la ecuación 5, por lo que podemos escribir

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(b\ln n)}{n^a} - i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(b\ln n)}{n^a} = 0 \tag{6}$$

en donde está claro que la expresión se anula si y solo si sus partes real e imaginaria, se anulan, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(b\ln n)}{n^a} = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(b\ln n)}{n^a} = 0 \quad (8)$$

Bernhard Riemann fue el primero en calcular dichos ceros, por allá en el año 1859, obteniendo los primeos tres valores de s, a saber:

$$0{,}5 + 14{,}135$$
$$0{,}5 + 21{,}022$$
$$0{,}5 + 25{,}011$$

lo que sin duda debió ser una proeza notable considerando la dificultad del cálculo y el hecho de que Riemann no contaba con calculadoras ni computadoras. Es de hecho, un esfuerzo notable[2], aún cuando se dispone de computadores modernos para realizar el cómputo, no quiero imaginar lo que significó para Riemann dicho cálculo! Por algo le decían "El Gran Riemann".

Al hacer dicho cálculo, Riemann, notó curiosamente como la parte real de s, en cada uno de los ceros hallados, valía exactamente $1/2$ y entonces conjeturó que esto debería ser así para todos los ceros de la función $\zeta(s)$. Por supuesto, abusando un poco de su gran capacidad intuitiva, ya que no hay nada en las ecuaciones de arriba que le permita a uno pensar que tal hecho se debe cumplir. Como sea que haya sido, a esta afirmación se le conoció en lo sucesivo como **la conjetura de Riemann**, y se convirtió en un "dolor de cabeza"desde entonces y es ahora considerado como el "coco"de la matemática contemporánea y uno de los problemas abiertos más importantes que existen en la ciencia.

La expresión 1 posee ciertos valores nulos, llamados ceros "triviales"para los cuales la función zeta se anula. De la ecuación 1 se puede ver que $s = -2$, $s = -4$, $s = -6$, etc., son ceros triviales. Los valores complejos s comprendidos entre $0 < Re(s) < 1$, para los cuales la función zeta también se anula, son llamados ceros "no triviales". La conjetura de Riemann hace referencia a estos ceros no triviales afirmando:

[2]Me lo pueden preguntar a mí.

Todo cero no trivial de $\zeta(s)$ tiene que cumplir $Re(s) = 1/2$.

En consecuencia, todos los ceros están alineados en el plano complejo formando una recta, llamada **recta crítica**, justo en $Re(s) = 1/2$.

La figura 1 muestra un esquema de la representación gráfica de los primeros ceros de $\zeta(s) = 0$. Nótese la existencia de un polo en $s = 1$, y la ubicación de los ceros no triviales, todos en la línea crítica $Re(s) = 1/2$.

La mayor parte de la comunidad matemática piensa que la conjetura es correcta, aunque otros grandes matemáticos como J. E. Littlewood y Atle Selberg se han mostrado escépticos.

No obstante, pese a los esfuerzos computacionales no se ha logrado encontrar un contraejemplo. Es decir, un valor de s para el cual $\zeta(s) = 0$ y con la condición de que $Re(s) \neq \frac{1}{2}$.

Hasta la presentación de este trabajo, claro está, donde se denuncian infinitos contraeejmplos.

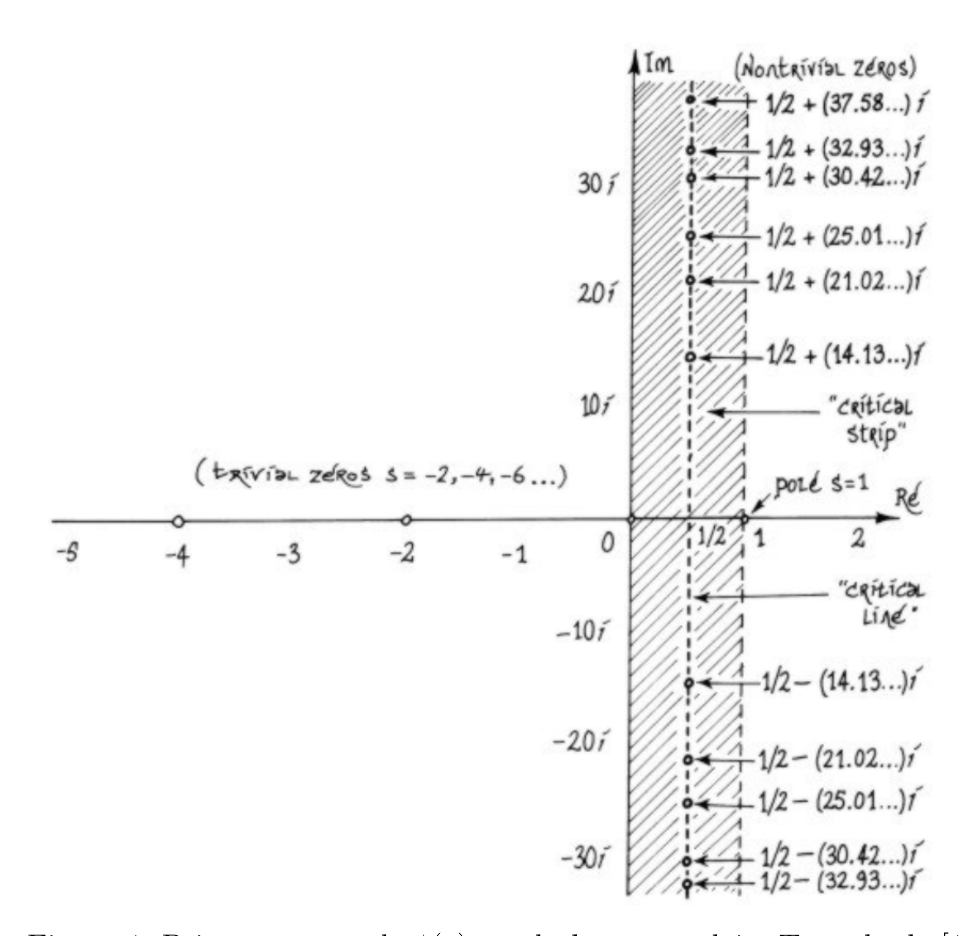


Figura 1: Primeros ceros de $\zeta(s)$ en el plano complejo. Tomado de [14].

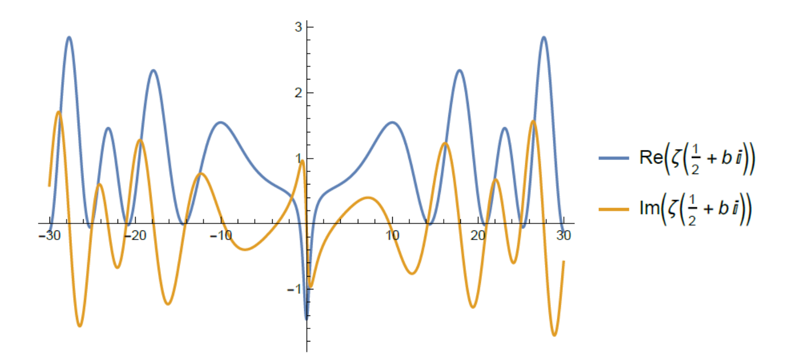


Figura 2: Gráfica de $\zeta(s)$ en el plano complejo. Tomado de [15].

4.1. Convergencia de los ceros

Ahora que tenemos una expresión computable para $\zeta(s)$ y que sabemos cuando converge la función, es el momento de obtener los criterios de convergencia para los ceros de $\zeta(s)$. Es decir, necesitamos un algoritmo para calcular $\zeta(s) = 0$.

Podríamos intentar un "ataque por fuerza bruta", como en el caso de la criba de Eratóstenes para calcular números primos; sin embargo, no es nuestro estilo y siempre es deseable un "esfuercito"a fin de conseguir un resultado más decoroso.

Sea $z = a + bi$ un complejo no nulo, esto es, $z \neq 0$ y sea $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ su norma. También, considere a z_0 como un cero de $\zeta(s)$, es decir, $\zeta(z_0) = 0$. El siguiente criterio nos permitirá cumplir con el propósito buscado:

"**La norma de z tiende a cero, cuando z tiende a z_0**"

En lenguaje metemático $\|z\| \longrightarrow 0$ si y solo si $z \longrightarrow z_0$. Tanto más se aproxima z a z_0, tanto más se aproximará $\|z\|$ a cero.

La demostración de este hecho es obvia desde la expresión 6, se tiene

$$\|z_0\| = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(b \ln n)}{n^a}\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(b \ln n)}{n^a}\right)^2}$$
$$\|z_0\| = \sqrt{0^2 + 0^2}$$
$$\|z_0\| = 0$$

debido a que z_0 es un cero de $\zeta(s)$.

Para implementar el algoritmo, vamos a valernos de un ejemplo numérico. Tomemos, el primer cero de la función, esto es, $\zeta(z_0) = 0$ para $z_0 =$ 0.5+14.135i. Primero asuma que, de este cero conocemos solamente su parte entera, esto es, 14. Necesitamos converger la parte decimal y para ello simplemente calculamos la norma para los valores 14.1, 14.2, 14.3, ... 14.9 y escogemos el valor que más se aproxime a cero (el menor valor) como el valor representativo, este valor nos entrega el primer decimal de z_0. Procediendo de esta manera se consigue:

```
i=0 re: 0.0123 im: 0.252 b= 14 norm: 0.06356051094769553
i=1 re: -0.00163 im: 0.0653 b= 14.1 norm: 0.004267063680288036
i=2 re: 0.0141 im: -0.122 b= 14.2 norm: 0.015010324186883877
i=3 re: 0.0601 im: -0.305 b= 14.3 norm: 0.09678257573736752
i=4 re: 0.137 im: -0.48 b= 14.4 norm: 0.24907275250510502
i=5 re: 0.242 im: -0.64 b= 14.5 norm: 0.46854448768625373
i=6 re: 0.373 im: -0.782 b= 14.6 norm: 0.7502633926958582
i=7 re: 0.526 im: -0.902 b= 14.7 norm: 1.089577972938231
i=8 re: 0.699 im: -0.996 b= 14.8 norm: 1.4810462022747748
i=9 re: 0.888 im: -1.06 b= 14.9 norm: 1.9157712005434449
```

analizando los cálculos se observa que para $i = 1$ se consigue un valor parcial para la norma=0.0042670, lo cual nos indica que el primer dígito decimal del valor buscado es 1. Ahora, para conseguir el segundo dígito decimal, repetimos este ejercicio pero partiendo del valor parcial 14.1, con lo cual conseguimos:

```
i=0 re: -0.00163 im: 0.0653 b= 14.1 norm: 0.004267063680288036
i=1 re: -0.0014 im: 0.0466 b= 14.11 norm: 0.002170345257393568
i=2 re: -0.000874 im: 0.0278 b= 14.12 norm: 0.0007751457590326
i=3 re: -5.28e-05 im: 0.00909 b= 14.13 norm: 0.000082653025867
i=4 re: 0.00107 im: -0.00964 b= 14.14 norm: 0.0000940663056752
i=5 re: 0.00248 im: -0.0284 b= 14.15 norm: 0.00081058808603856
i=6 re: 0.0042 im: -0.0471 b= 14.16 norm: 0.002233412015026754
i=7 re: 0.00622 im: -0.0658 b= 14.17 norm: 0.00436370718280975
i=8 re: 0.00853 im: -0.0844 b= 14.18 norm: 0.00720259912087224
i=9 re: 0.0112 im: -0.103 b= 14.19 norm: 0.010751147951535013
```

y de nuevo, analizando estos valores encontramos $i = 3$ con el parcial para la norma=0.000082653 como el menor valor de la serie y con ello se consigue

14.13 como el parcial buscado. Ahora, nuevamente repetimos este procedimiento pero tomando 14.13 como punto de partida, para conseguir:

```
i=0 re:-5.28e-05 im:0.00909 b=14.13 norm: 8.265302586739142e-05
i=1 re:4.57e-05 im:0.00722 b=14.131 norm: 0.0000520987339106264
i=2 re:0.000147 im:0.00534 b=14.132 norm: 0.0000285847025611317
i=3 re:0.000252 im:0.00347 b=14.133 norm: 0.0000121121356834308
i=4 re:0.000359 im:0.0016 b=14.134 norm: 0.00000268223732143979
i=5 re:0.00047 im:-0.000275 b=14.135 norm: 0.000000296211581997
i=6 re:0.000583 im:-0.00215 b=14.136 norm: 0.000004955262522647
i=7 re:0.000699 im:-0.00402 b=14.137 norm: 0.000016660594031066
i=8 re:0.000819 im:-0.00589 b=14.138 norm: 0.000035413409701511
i=9 re:0.000941 im:-0.00777 b=14.139 norm: 0.000061214912708464
```

en donde para $i = 5$ se consigue un parcial de la norma=0.0000002962 que nos entrega el tercer dígito decimal, con lo cual $z_0 = 0{,}5 + 14{,}135i$, continuando el proceso se consiguen puros ceros, por consiguiente, damos por terminado la convergencia.

Para lograr este resultado, habíamos hecho la suposición de que conocíamos la parte entera de z_0. Sin embargo, necesitamos saber para que valores de z existe un cero de Riemann, lo cual se consigue aplicando el mismo principio. Por ejemplo, para conocer los ceros que pueda haber entre los primeros 60 enteros naturales, evaluamos la serie dada por 6, comenzando en el valor $Imag(z) = 10$ y procediendo sucesivamente hasta agotar el intervalo, consiguiendo el siguiente resultado:

```
D:\devgo\projects\riemann>go run riem_cmp.go
=========Función TestNormRiemann ===========
Realiza una prueba sobre la norma de la serie ...
Tiempo antes de la prueba: 2017-05-22 14:38:38.5070943 -0500
i= 0 im:   10 norm: 1.7889776690881514
i= 1 im:   11 norm: 5.3098650268751655
i= 2 im:   12 norm: 6.768324648445004
i= 3 im:   13 norm: 3.4967826646143063
i= 4 im:   14 norm: 0.06356051094769553
i= 5 im:   15 norm: 2.381955939157363
i= 6 im:   16 norm: 6.452188324133802
i= 7 im:   17 norm: 4.568704007474071
i= 8 im:   18 norm: 0.9997764574506408
```

```
i= 9 im:   19 norm: 2.6713988912976956
i= 10 im:   20 norm: 2.945157748816574
i= 11 im:   21 norm: 0.002662873270821427
i= 12 im:   22 norm: 5.357107076667078
i= 13 im:   23 norm: 12.165704691861526
i= 14 im:   24 norm: 5.837743666058762
i= 15 im:   25 norm: 0.0006139721348228435
i= 16 im:   26 norm: 2.2110427862684428
i= 17 im:   27 norm: 1.2916684547596544
i= 18 im:   28 norm: 4.7464114975910885
i= 19 im:   29 norm: 8.593858281013109
i= 20 im:   30 norm: 1.4332421065034437
i= 21 im:   31 norm: 2.143418386822452
i= 22 im:   32 norm: 4.340379601242355
i= 23 im:   33 norm: 0.04002367855676915
i= 24 im:   34 norm: 8.416930281999235
i= 25 im:   35 norm: 9.441743044621148
i= 26 im:   36 norm: 1.5338090982539594
i= 27 im:   37 norm: 0.714128946288046
i= 28 im:   38 norm: 1.1286250787015908
i= 29 im:   39 norm: 12.50188357251842
i= 30 im:   40 norm: 9.276328458775254
i= 31 im:   41 norm: 0.08318423474708224
i= 32 im:   42 norm: 5.945272907345323
i= 33 im:   43 norm: 0.8871081282085561
i= 34 im:   44 norm: 2.50511811977559
i= 35 im:   45 norm: 2.5696115395314534
i= 36 im:   46 norm: 5.933446030271415
i= 37 im:   47 norm: 7.460767064095884
i= 38 im:   48 norm: 0.0002458165045608516
i= 39 im:   49 norm: 2.5955064410270676
i= 40 im:   50 norm: 0.6752034911191576
i= 41 im:   51 norm: 16.039741414193923
i= 42 im:   52 norm: 10.617457663722135
i= 43 im:   53 norm: 0.007145333447324516
i= 44 im:   54 norm: 1.4552950248016576
i= 45 im:   55 norm: 3.3168423949796426
i= 46 im:   56 norm: 2.054393784260305
```

```
i= 47 im:   57 norm: 4.846507797496249
i= 48 im:   58 norm: 16.290909889314573
i= 49 im:   59 norm: 1.6175687339978813
Tiempo despues de la prueba: 2017-05-22 14:38:50.0765802 -0500
```

Analizando estos resultados, vemos que, los valores para los cuales posiblemente existe un cero de Riemann son aquellos para los cuales $\|z\| < 1$, estos son:

```
i= 4 im:   14 norm: 0.06356051094769553
i= 8 im:   18 norm: 0.9997764574506408
i= 11 im:   21 norm: 0.002662873270821427
i= 15 im:   25 norm: 0.0006139721348228435
i= 23 im:   33 norm: 0.04002367855676915
i= 27 im:   37 norm: 0.714128946288046
i= 31 im:   41 norm: 0.08318423474708224
i= 33 im:   43 norm: 0.8871081282085561
i= 38 im:   48 norm: 0.0002458165045608516
i= 40 im:   50 norm: 0.6752034911191576
i= 43 im:   53 norm: 0.007145333447324516
```

Y por último, para verificar que realmente corresponden a un cero de Riemann, realizamos sobre cada uno de estos valores el proceso ejecutado anteriormente para converger el primer cero de Riemann, es decir, cuando $z_0 = 0{,}5 + 14{,}135$.

Para lograr todos estos cálculos, desarrollamos las siguientes rutinas.

4.1.1. Algoritmo use_riem_03

Cálcula la serie en 6 tomando como parámetros:

- *precision*, el número de términos de la sumatoria.
- *p_real*, el valor para la parte real, normalmente $\frac{1}{2}$, asumiendo que la conjetura de Riemann es correcta.
- *p_img*, para la parte imaginaria de z.

la función devuelve dos valores de tipo float64[3] con las partes real e imaginaria de la sumatoria en 6.

[3] El equivalente a double en C++.

```
func RiemannSerie(precision int,p_real,
                              p_img float64)(float64,float64){
 // calcula al serie de Riemann
 var n,i int
 var a,b,ang,sen,cos,pr float64
 var fre,fcmp,cmp,re,sumac,sumar float64
 var bas,fac float64
 n=precision
 sumar=0
 sumac=0
 bas=-1.0
 a=p_real
 b=p_img
 for i=1;i<n;i++{
 ang=b*math.Log(float64(i))
 sen=math.Sin(ang)
 cos=math.Cos(ang)
 pr=math.Pow(float64(i),a)
 fac=math.Pow(bas,float64(i-1))
 fre=fac*(cos/pr)
 fcmp=fac*(sen/pr)
 re=fre+sumar
 cmp=fcmp+sumac
 fmt.Printf("i= %d real: %g complex: %g\n",i,re,cmp)
 sumar=re
 sumac=cmp
 }
 return re,cmp
}
```

4.1.2. Algoritmo use_riem_04

Realiza la convergencia sobre un solo dígito, como se explicó anteriormente. Toma los siguientes parámetros:

- *precision*, el número de términos de la sumatoria.
- *dec*, un número entero de la forma 10, 100, 1000, 10000, etc., dependiendo de si se trata del primer decimal, segundo, tercero, etc.

- *p_real*, el valor para la parte real, normalmente $\frac{1}{2}$, asumiendo que la conjetura de Riemann es correcta.
- *p_img*, para la parte imaginaria de z.

La función devuelve la parte imaginaria de la sumatoria en 6.

```
func GetConvergeDig(precision,dec int,p_real,
                                  p_img float64)float64{
 // devuelve la parte imaginaria que converge
 // con el criterio de la menor norma
 var i,dig int
 var re,im,norm,p_dec,b,minor float64
 p_dec=1/float64(dec)
 b=p_img
 minor=10000000000000000000.0
 for i=0;i<10;i++{
 re,im=RiemannSerie(precision,p_real,b)
 norm=re*re+im*im
 if norm<minor{
 minor=norm
 dig=i
 }
 b=b+p_dec
 }
 im=p_img+float64(dig)*p_dec
 return im
}
```

4.1.3. Algoritmo use_riem_05

Realiza la convergencia sobre todos los dígitos, como se explicó anteriormente. Toma los siguientes parámetros:

- *precision*, el número de términos de la sumatoria.
- *p_real*, el valor para la parte real, normalmente $\frac{1}{2}$, asumiendo que la conjetura de Riemann es correcta.
- *p_img*, para la parte imaginaria de z.

La función devuelve la parte imaginaria de la sumatoria en 6, con todos los dígitos que convergen.

```
func ConvergeImgZero(precision int,p_real,
                                      p_img float64)float64{
 // devuelve la parte imaginaria del cero que
 // converge en la serie
 var i,va_dec,Digs int
 var b_im,test float64
 va_dec=10
 Digs=5
 for i=0;i<Digs;i++{
 b_im=GetConvergeDig(precision,va_dec,p_real,p_img)
 fmt.Printf("i= %d b_im: %2.6g\n",i,b_im)
 va_dec*=10
 p_img=b_im
 }
 test=b_im-math.Floor(b_im)
 if test>=0.999{b_im=0}
 return b_im
}
```

4.1.4. Algoritmo use_riem_06

Realiza una prueba sobre enteros consecutivos para determinar posibles ceros de Riemann. Toma los siguientes parámetros:

- *precision*, el número de términos de la sumatoria.
- *iters*, el número de enteros a probar.
- *p_real*, el valor para la parte real, normalmente $\frac{1}{2}$, asumiendo que la conjetura de Riemann es correcta.
- *p_img*, para la parte imaginaria de z.

La función no devuelve ningún valor, pero imprime en pantalla el resultado de la prueba, la cual se realiza, en realidad, sobre el cuadrado de la norma y no sobre la norma misma.

```
func TestNormRiemann(precision,iters int,p_real,p_img float64){
 // realiza una pruena de la norma
 // sobre la parte entera de p_img
 var i int
 var re,im,norm,b float64
 fmt.Println("=========Función TestNormRiemann ===========")
 fmt.Println("Realiza una prueba sobre la norma de la serie")
 fmt.Printf("Tiempo antes de la prueba: %v \n",time.Now())
 b=p_img
 for i=0;i<iters;i++{
  re,im=RiemannSerie(precision,p_real,b)
  norm=re*re+im*im
  fmt.Printf("i= %d im: %4.6g norm: %g\n",i,b,norm)
  norm=re*re+im*im
  b++
 }
 fmt.Printf("Tiempo despues de la prueba: %v \n",time.Now())
}
```

Con estas herramientas procedemos a construir el código que automatiza todo el proceso, es decir, una rutina que investiga si un determinado valor puede ser un cero de Riemann y si encuentra que la respuesta es positiva procede a la convergencia del valor en cuestión. El código para esta rutina es como sigue:

4.1.5. Algoritmo use_riem_07

Investiga sobre un intervalo dado la existencia de los ceros de Riemann. Toma los siguientes parámetros:

- *precision*, el número de términos de la sumatoria.
- *NumCeros*, el número de ceros de Riemann a calcular.
- *p_real*, el valor para la parte real, normalmente $\frac{1}{2}$, asumiendo que la conjetura de Riemann es correcta.
- *p_img*, para la parte imaginaria de z.

La función no devuelve ningún valor, pero imprime en pantalla el resultado de la investigación.

```
func SearchRiemannZeros(precision,NumCeros int,p_real,
                                                p_img float64){
  // busca los ceros de Riemann en un determinado intervalo
  // que empieza por from y continua hasta agotar iters
  var i,ceros int
  var re,im,b_im,norm float64
  fmt.Println("======Función SearchRiemannZeros ========")
  fmt.Println("Busca los ceros de Riemann en un intervalo")
  fmt.Printf("Tiempo antes de inciar: %v \n",time.Now())
  ceros=0
  for i=0; ;i++{
  re,im=RiemannSerie(precision,p_real,p_img)
  norm=re*re+im*im
  if(norm>1){
   p_img++
   continue
  }else{
  b_im=ConvergeImgZero(precision,p_real,p_img)
  if (norm<0.9){
   // es un cero de riemann
   if b_im==math.Floor(b_im){
   b_im--
   b_im=ConvergeImgZero(precision,p_real,b_im)
  }
  ceros++
  fmt.Printf("Iter= %d Cero No %d de %d real: %g img: %g
          norma: %g suma real: %g suma img  %g\n",i,ceros,
                         NumCeros,p_real,b_im,norm,re,im)
  if(ceros==NumCeros){break}
  }
 }
 p_img++
 }
 fmt.Printf("Tiempo despues de calcular: %v \n",time.Now())
}
```

Eureka! Tenemos un algoritmo para hacer converger los ceros de la función Z de Riemann y para estrenarlo procedemos a calcular los primeros 50 ceros

de $\zeta(s)$.

Para este último ejercicio la función `main()` usada es como sigue

```
func main() {
 var precision int
 var p_real,p_img float64
 precision=1000000
 p_real=0.5
 p_img=10.0
 SearchRiemannZeros(precision,50,p_real,p_img)
}
```

El resultado se muestra a continuación:

```
D:\devgo\projects\riemann>go run riem_cmp.go
=========Función SearchRiemannZeros ===========
Busca los ceros de Riemann en un intervalo dado ...
Tiempo antes de inciar: 2017-05-22 17:51:49.763298 -0500
1 re: 0.5 im: 14.135 norm: 0.06356 sr: 0.01232 si 0.2518
2 re: 0.5 im: 21.02225 norm: 0.002663 sr: 0.02381 si 0.04578
3 re: 0.5 im: 25.011 norm: 0.000614 sr: -0.01467 si 0.01997
4 re: 0.5 im: 32.94 norm: 0.04002 sr: -6.528e-05 si -0.2001
5 re: 0.5 im: 37.6 norm: 0.7141 sr: 0.7206 si -0.4414
6 re: 0.5 im: 40.92 norm: 0.08318 sr: 0.1035 si -0.2692
7 re: 0.5 im: 43.33 norm: 0.8871 sr: 0.02987 si 0.9414
8 re: 0.5 im: 48.01 norm: 0.0002458 sr: -0.001655 si 0.01559
9 re: 0.5 im: 49.8 norm: 0.6752 sr: -0.1496 si -0.808
10 re: 0.5 im: 52.9705 norm: 0.007145 sr: 0.078 si -0.03257
11 re: 0.5 im: 60.832 norm: 0.3139 sr: 0.01959 si -0.5599
12 re: 0.5 im: 65.113 norm: 0.1183 sr: 0.2175 si 0.2665
13 re: 0.5 im: 67.1 norm: 0.1034 sr: 0.1703 si 0.2727
14 re: 0.5 im: 72.1 norm: 0.01362 sr: -0.1155 si -0.01648
15 re: 0.5 im: 77.145 norm: 0.2335 sr: 0.2539 si 0.4111
16 re: 0.5 im: 82.9105 norm: 0.07386 sr: -0.1481 si -0.2278
17 re: 0.5 im: 88.81 norm: 0.391 sr: 0.2994 si -0.549
18 re: 0.5 im: 95.9 norm: 0.3038 sr: -0.2343 si -0.4989
19 re: 0.5 im: 98.83123 norm: 0.1752 sr: 0.3573 si 0.218
20 re: 0.5 im: 107.2 norm: 0.4294 sr: -0.006762 si 0.6552
21 re: 0.5 im: 111.9 norm: 0.006905 sr: -0.03246 si 0.07649
```

```
22 re: 0.5 im: 118.8 norm: 0.6578 sr: -0.7262 si -0.3611
23 re: 0.5 im: 122.95 norm: 0.03759 sr: 0.06261 si -0.1835
24 re: 0.5 im: 127.52 norm: 0.8405 sr: -0.005735 si -0.9168
25 re: 0.5 im: 131.1 norm: 0.2224 sr: 0.2834 si 0.377
26 re: 0.5 im: 134.8 norm: 0.4937 sr: 0.6081 si -0.3521
27 re: 0.5 im: 138.12 norm: 0.3847 sr: 0.1441 si 0.6033
28 re: 0.5 im: 141.124 norm: 0.3138 sr: 0.3161 si 0.4625
29 re: 0.5 im: 143.112 norm: 0.4136 sr: -0.153 si 0.6247
30 re: 0.5 im: 146.0011 norm: 0.0000107 sr: 0.002802 si 0.0017
31 re: 0.5 im: 150.93 norm: 0.04704 sr: -0.1763 si 0.1263
32 re: 0.5 im: 153.025 norm: 0.01039 sr: -0.07712 si 0.06668
33 re: 0.5 im: 156.113009 norm: 0.3202 sr: 0.116 si 0.5538
34 re: 0.5 im: 158.85010 norm: 0.6862 sr: -0.3049 si -0.7702
35 re: 0.5 im: 163.031 norm: 0.003003 sr: -0.03573 si -0.04155
36 re: 0.5 im: 169.1 norm: 0.1119 sr: -0.192 si 0.274
37 re: 0.5 im: 179.920 norm: 0.1124 sr: 0.2767 si -0.1894
38 re: 0.5 im: 182.209 norm: 0.5234 sr: 0.5841 si -0.4268
39 re: 0.5 im: 185.6 norm: 0.127 sr: 0.3441 si -0.09269
40 re: 0.5 im: 192.03 norm: 0.0104 sr: 0.02836 si 0.09797
41 re: 0.5 im: 193.1 norm: 0.1232 sr: 0.3311 si 0.1166
42 re: 0.5 im: 198.02 norm: 0.003324 sr: -0.006538 si 0.05728
43 re: 0.5 im: 207.91 norm: 0.05683 sr: 0.1267 si 0.202
44 re: 0.5 im: 216.2 norm: 0.7524 sr: -0.0599 si 0.8653
45 re: 0.5 im: 219.1 norm: 0.1241 sr: 0.1498 si 0.3188
46 re: 0.5 im: 221.431 norm: 0.381 sr: 0.4845 si -0.3824
47 re: 0.5 im: 224.01 norm: 0.001307 sr: -0.03393 si 0.01249
48 re: 0.5 im: 231.3 norm: 0.001885 sr: -0.02378 si -0.03633
49 re: 0.5 im: 241.05 norm: 0.1095 sr: -0.002696 si 0.3309
50 re: 0.5 im: 244.1 norm: 0.04349 sr: -0.1458 si 0.1491
Tiempo despues de calcular: 2017-05-22 18:08:13.9945211 -0500
```

donde `re` se refiere a la parte real de z_0, `im` hace lo propio con la parte imaginaria, `norm` es $\|\zeta(z_0)\|$, `sr` es la sumatoria sobre la parte real de $\zeta(z_0)$, es decir, $Re(\zeta(z_0))$ y `si` es la sumatoria sobre la parte imaginaria de $\zeta(z_0)$, esto es, $Imag(\zeta(z_0))$ y z_0 es un cero de $\zeta(s)$, como se definió anteriormente. Algunos valores han sido recortados un poco para impedir que violen la margen, pero en terminos aceptables, esta es la salida de la rutina que calcula y converge los valores de z_0 para los primeros 50 ceros de la función Z de

Riemann. Observando la salida, se aprecia que el tiempo de convergencia para estos 50 primeros ceros es de apenas 16 minutos!

5. Los Contra-ejemplos de $\zeta(s)$

En la sección anterior hemos revelado una infinitud de "ceros de Riemann"que se encuentran en la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$. En esta sección hacemos patente la caída de la conjetura de Riemann y entregamos los "nuevos criterios"para buscar los ceros de $\zeta(z)$, en su sentido amplio.

Riemann había afirmado que todos los ceros de $\zeta(z)$ están en la recta de los reales $\Re(z) = \frac{1}{2}$, pero las evidencias entregadas aquí demuestran que hay infinitos ceros de $\zeta(z)$ en la recta definida por $\Re(z) = 1$. Y esto no es todo. Hay más rectas que, aunque con soluciones más escasas, o con ceros mucho más distanciados entre sí (gaps), se presentan. Este es el caso de $\Re(z) = 0{,}51$, $\Re(z) = 0{,}55$, $\Re(z) = 0{,}9$, y $\Re(z) = 1{,}12$, entre otras.

Todo apunta a que los ceros de Riemann se encuentran acotados por la región $0{,}45 \leq z_0 \leq 0{,}55$ y la región $0{,}9 \leq z_0 \leq 1{,}1$, donde z_0 representa un cero de Riemann, es decir, que tenemos todos los ceros en la vecindad de las rectas $\Re(z) = \frac{1}{2}$ y $\Re(z) = 1$.

5.1. Algoritmo para hallar contraejemplos

Como ha sido costumbre a lo largo de todo este trabajo, hago entrega de un código Go que se encarga de calcular los ceros de Riemann para valores diferentes a $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

5.1.1. use_riem_08

```
func SearchContraExample(delta float64,iCeros int) {
 var precision,num_ceros int
 var p_real,p_img float64
 f, err := os.Create("search_riemann_backsamples.txt")
 check(err)
 f.WriteString(fmt.Sprintf("==Función
                             SearchRiemannBackZeros ==\n"))
 f.WriteString(fmt.Sprintf("Busca los ceros de Riemann
                          con parte real diferentes a 1/2\n"))
```

```
 f.WriteString(fmt.Sprintf("Tiempo antes de inciar:
                                        %v \n",time.Now()))
 precision=1000000
 p_real=1.0
 p_img=10.0
 num_ceros=0;
 for i:=0; ;i++{
 re,im:=RiemannSerie(precision,p_real,p_img)
 norm:=re*re+im*im
 if norm <0.01{
 num_ceros++
 fmt.Printf("Iter: %d Cero No: %d Real: %g Img: %g re:
   %g img: %g norm: %g\n",i,num_ceros,p_real,p_img,re,im,norm)
 f.WriteString(fmt.Sprintf("Iter: %d Cero No: %d Real:
 %g Img: %g re: %g img: %g norm: %g\n",i,num_ceros,p_real,
                                        p_img,re,im,norm))
 }
 //fmt.Printf("Iter: %d\n",i)
 p_img+=delta;
 if(num_ceros==iCeros){break}
 }
 f.WriteString(fmt.Sprintf("Tiempo despues de calcular:
                                   %v \n",time.Now()))
 defer f.Close()
}
```

En el cuerpo de la función se puede leer la sentencia

```
 p_real=1.0
```

que indica que la función SearchContraExample() se va correr para buscar ceros en la recta de los reales $\Re(z) = 1{,}0$.

5.2. Caso $\Re(z) = 1$

El algoritmo use_riem_08 arroja para este caso un número infinito de ceros, de los cuales, me permito citar los primeros 10 ceros de Riemann que sirven como contraejemplo de la conjetura del mismo autor:

El archivo adjunto denominado

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma($\zeta(z)$)**
1	1	18.10000000000001	0.0014110395974177017
2	1	18.20000000000001	0.007991926198652324
3	1	27.200000000000138	0.000063203645784018
4	1	36.200000000000266	0.004995780440829457
5	1	36.30000000000027	0.0022279746233695432
6	1	45.300000000000395	0.001451754123252731
7	1	54.400000000000524	0.0002183254463861249
8	1	63.40000000000065	0.008193758260491651
9	1	63.500000000000654	0.006106938422794771
10	1	72.40000000000018	0.007394798661596012

Cuadro 1: Primeros diez ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 1$, de un total de 1000 calculados con la rutina SearchContraExample().

`search_riemann_backsamples_to_1000_in_1.txt`

contiene el listado completo de los primeros 1000 ceros no triviales de Riemann en la recta $\Re(z) = 1$, de los cuales los primeros diez ceros aparecen en el cuadro 1.

La columna $\Re(z)$ muestra el valor real de z que en este caso es la unidad. De otra parte, la columna $\Im(z)$ muestra el valor imaginario de z, entre tanto que la columna $Norma(\zeta(z))$ muestra el valor de la norma[4] de $\zeta(z)$, esto es, el valor de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria obtenidos a partir de la ecuación 6, es decir:

$$\Re(\zeta(z)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(b \ln n)}{n^a} \right)^2$$
$$\Im(\zeta(z)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(b \ln n)}{n^a} \right)^2$$

el cual naturalmente, debe ser muy cercano a cero como se aprecia en el cuadro 1, condición que, de acuerdo con la sección 4, establece los criterios de convergencia para los ceros de la función $\zeta(z)$.

[4]Estrictamente hablando no es la norma de z, pero para el caso se puede tomar como tal sin afectar el procedimiento.

El lector podrá apreciar en el listado de los primeros 1000 ceros, el siguiente formato

```
Iter: 82 Cero No: 2 Real: 1 Img: 18.20000000000001
re: 0.015237492021613992 img: -0.08808941500284569
norm: 0.007991926198652324
```

que ilustra el segundo cero de este caso, y que viene acompañado de unos parámetros que en términos generales se deben entender así:

- Iter: es el número de la iteración en la cual ocurre el cero.
- Cero No: es la referencia que numera los ceros calculados de $\zeta(z)$.
- Real: es el valor real de z, esto es, $\Re(z)$. En este caso $\Re(z) = 1$ para todos los ceros de este caso.
- Imag: es el valor imaginario de z, esto es, $\Im(z)$ y que corresponde a la segunda columna del cuadro 1.
- re: (no se muestra en el cuadro 1) corresponde a la parte real de la serie calculada con la ecuación 6.
- img: (no se muestra en el cuadro 1) corresponde a la parte imaginaria de la serie calculada con la ecuación 6, y
- norm: corresponde a la norma calculada con los dos últimos valores, como se explicó anteriormente.

esta notación se mantiene para todos los casos presentados en este trabajo.

Desde los trabajos de Hardy[11] que datan de 1914 se sabe que existen infinitos ceros de Riemann sobre la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$ y la facilidad con la que se obtienen estos ceros hace evidente el aporte de Hardy. También en 1989, Conrey[5] mostró que el 40 % de los ceros de $\zeta(z)$ están sobre la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$, y surge la pregunta obligada: Dónde están los demás ? Pues, aquí se lo contamos ...

El otro 40 % está en la recta $\Re(z) = 1$, donde, a primera vista, hay tantos ceros como en la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$. No obstante, esta "afirmación de Conrey"se complica, si consideramos que los ceros en la recta $\Re(z) = 0{,}5$ se repiten sobre

[5] Véase [9].

la recta $\Re(z) = 0{,}51$, y hay más ceros (infinitos) en las rectas $\Re(z) = 0{,}45$, $\Re(z) = 0{,}47$, $\Re(z) = 0{,}49$, $\Re(z) = 0{,}9$ y $\Re(z) = 1{,}1$ como se mostrará más adelante en esta misma sección, aunque en estos últimos casos la densidad de tales ceros muestra importantes variaciones.

Los infinitos ceros en la recta $\Re(z) = 1$ son diferentes de los obtenidos en la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$, como se puede apreciar, en el cuadro 2, donde es evidente la diferencia, al menos para los primeros ceros inspeccionados.

No	**Recta** $\Re(z) = 1/2$	**Recta** $\Re(z) = 1$
1	0.5 + 18.1i	1+ 14.13i
2	0.5 + 18.2i	1+ 21.02i
3	0.5 + 27.2i	1+ 25.01i
4	0.5 + 36.2i	1+ 32.94i
5	0.5 + 36.3i	1+ 37.6i
6	0.5 + 45.3i	1+ 40.92i
7	0.5 + 54.4i	1+ 43.33i
8	0.5 + 63.4i	1+ 48.01i
9	0.5 + 63.5i	1+ 49.8i
10	0.5 + 72.4i	1+52.97i

Cuadro 2: Comparación entre los primeros diez ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 1/2$, y $\Re(z) = 1$.

5.3. Caso $\Re(z) = 1{,}1$

En este caso, también se obtiene un subconjunto infinito de ceros, de los cuales se muestran los primeros cinco de ellos en el cuadro 3

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma**($\zeta(z)$)
1	1.1	72.50000000000017	0.006393013599859625
2	1.1	99.69999999999862	0.009681014923163587
3	1.1	163.09999999999502	0.007497235285664249
4	1.1	163.19999999999501	0.006405047668407284
5	1.1	208.49999999999244	0.006895563657151994

Cuadro 3: Primeros cinco ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 1{,}1$.

En este caso, sin embargo, ya se hace palpable una disminución en la densidad de tales números.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_26_in_1_1`.

5.4. Caso $\Re(z) = 1{,}12$

Con excepcion del segundo cero, los valores obtenidos en el caso anterior, se repiten en este caso como se puede apreciar en el cuadro 4

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma($\zeta(z)$)**
1	1.12	72.50000000000017	0.006393013599859625
2	1.12	163.09999999999502	0.007497235285664249
3	1.12	163.19999999999501	0.006405047668407284
4	1.12	208.49999999999244	0.006895563657151994

Cuadro 4: Primeros cuatro ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 1{,}12$.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_4_in_1_12`.

5.5. Caso $\Re(z) = 0{,}9$

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma($\zeta(z)$)**
1	0.9	72.50000000000017	0.007002852276568753
2	0.9	163.09999999999502	0.0064237633985132995
3	0.9	163.19999999999501	0.005908466423589535
4	0.9	208.49999999999244	0.009011723274798326
5	0.9	353.5000000000119	0.008473531489489103
6	0.9	407.90000000002425	0.007834514892021036
7	0.9	444.2000000000325	0.007696359995814152
8	0.9	489.5000000000428	0.0057154540007428225
9	0.9	580.1000000000633	0.005554278399083576
10	0.9	580.2000000000634	0.006879568500550641
11	0.9	598.3000000000675	0.008588684070176784

Cuadro 5: Primeros once ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 0{,}9$.

Una vez más, resulta ser un subconjunto del caso $\Re(z) = 1$, pero con una densidad menor de ceros como se esperaba, de manera que aquí también hay infinitos ceros.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_11_0_9`.

5.6. Caso $\Re(z) = 0{,}51$

Al observar los resultados del cuadro 6 se nota claramente que la serie corresponde a los ceros del caso $\Re(z) = 0{,}5$ y por ende también son infinitos. Esta situación se repite para el caso $\Re(z) = 0{,}49$.

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma($\zeta(z)$)**
1	0.51	14.099999999999985	0.004562913807891992
2	0.51	21.00000000000005	0.0031289422689295683
3	0.51	25.000000000000107	0.0011396431261511502
4	0.51	30.400000000000183	0.005652558094509879
5	0.51	37.600000000000286	0.001414146389925448
6	0.51	40.90000000000033	0.005683378747085575
7	0.51	43.30000000000037	0.00683115536163081
8	0.51	48.00000000000043	0.0011234898722303683
9	0.51	49.80000000000046	0.009103550770336817
10	0.51	53.000000000000504	0.007697724898610874
11	0.51	65.10000000000059	0.0024333446496536955
12	0.51	67.10000000000048	0.008355791993579342

Cuadro 6: Primeros doce ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 0{,}51$.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_12_in_0_51`.

5.7. Caso $\Re(z) = 0{,}49$

Idéntico al caso $\Re(z) = 0{,}51$, compartiendo el mismo conjunto de soluciones, lo cual parece obedecer una cierta simetría.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_12_in_0_49`.

5.8. Caso $\Re(z) = 0{,}47$

Los primeros veinticuatro ceros de este caso se pueden apreciar en el cuadro 7. De nuevo resulta ser un subconjunto del caso principal “asociado”, es decir, de $\Re(z) = 0{,}5$ por lo que, de nuevo. tenemos infinitos ceros.

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	**Norma($\zeta(z)$)**
1	0.47	14.099999999999985	0.007738009116450136
2	0.47	21.00000000000005	0.008010610049751607
3	0.47	25.000000000000107	0.005753562095611738
4	0.47	37.600000000000286	0.005818292528792604
5	0.47	48.00000000000043	0.009617935298437285
6	0.47	72.1000000000002	0.00590370705476036
7	0.47	127.49999999999704	0.008923227000379196
8	0.47	145.999999999996	0.008511863441731942
9	0.47	162.99999999999503	0.007261568634993591
10	0.47	185.59999999999374	0.008995523355144048
11	0.47	207.89999999999247	0.009229224879150367
12	0.47	271.49999999999324	0.007297461133655597
13	0.47	334.2000000000075	0.006686532729146962
14	0.47	353.5000000000119	0.0093441643469453
15	0.47	517.6000000000491	0.008636160392782201
16	0.47	564.5000000000598	0.007731061952442344
17	0.47	598.5000000000675	0.008303654208439471
18	0.47	630.8000000000749	0.006935631186333887
19	0.47	728.4000000000971	0.007854264735697284
20	0.47	1054.8000000001362	0.005207334675963759
21	0.47	1055.000000000136	0.004258612507995127
22	0.47	1083.3000000001102	0.005762554057765515
23	0.47	1169.7000000000317	0.008341729402906542
24	0.47	1267.199999999943	0.007197000204738352

Cuadro 7: Primeros veinticuatro ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 0{,}47$.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_29_in_0_47`.

5.9. Caso $\Re(z) = 0{,}45$

No	$\Re(z)$	$\Im(z)$	Norma($\zeta(z)$)
1	0.45	1329.0999999998867	0.007812011796187863
2	0.45	1329.1999999998866	0.006568151129400164
3	0.45	1415.599999999808	0.008581901108421554

Cuadro 8: Primeros tres ceros de Riemann en la recta $\Re(z) = 0{,}45$.

Archivo adjunto: `search_riemann_backsamples_to_3_in_0_45`.

6. La Nueva Conjetura

Ante la contundencia de los hechos, una vez reconocida la falsedad de la conjetura de Riemann, debemos enunciar nuevos hechos que sustituyen las viejas especulaciones en este campo, el más importante de ellos se puede enunciar como sigue:

"Los ceros de $\zeta(s)$ están todos en el intervalo $0{,}45 \leq \Re(s) < 1{,}2$.

Afirmación que resume los resultados encontrados y denunciados en este trabajo, como se puede apreciar mejor en el cuadro 9.

$\Re(s)$	Cantidad	Densidad	Observaciones
0.45	infinitos	escasa	gaps muy largos, difícil calculo
0.47	infinitos	abundante	repite ceros del caso 0.5
0.49	infinitos	abundante	gaps cortos
0.5	infinitos	abundante	caso de Riemann
0.51	infinitos	abundante	repite los ceros del caso 0.5
0.55	infinitos (?)	escasa	solo se conocen dos ceros
0.9	infinitos	abundante	hay menor densidad que en caso 0.5
1	infinitos	abundante	los ceros son diferentes al caso 0.5
1.1	infinitos	abundante	repite ceros del caso 1
1.12	infinitos	escasa	repite ceros del caso 1, gaps largos

Cuadro 9: Resumen de los valores de $\Re(s)$ investigados.

También se puede afirmar que los ceros de la función ζ están distribuidos a lado y lado de las rectas $\Re(z) = 0{,}5$ y $\Re(z) = 1$, como se desprende del cuadro 9.

7. Conclusiones

1. La conjetura de Riemann es falsa.

2. La nueva conjetura supone que: los ceros de $\zeta(s)$ están todos en el intervalo $0{,}45 \leq \Re(s) < 1{,}2$.

3. Algunos autores habían denunciado que en la recta $\Re(z) = 1$ no podía haber ceros, pero como se mostró aquí, en realidad, hay infinitos.

4. Las rectas principales con existencia de infinitos ceros son $\Re(z) = 0{,}5$ y $\Re(z) = 1$, pero a lado y lado de estas dos rectas aparecen otras rectas con infinitos ceros aunque con menor densidad de soluciones.

5. Los resultados denunciados aquí contradicen muchas especulaciones y “afirmaciones”que hasta la fecha se habían hecho sobre el problema, esperamos, con esta entrega, aclarar un poco el panorama pero hace falta investigar mucho más y formalizar los hechos consolidados por los cálculos.

Referencias

[1] RIEMANN, BERTRAND. 1859. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. American Mathematical Society, web site.

[2] HAYES, BRYAN. *El espectro del riemannio. Investigación y Ciencia.* Enero de 2004. **Pags. 14-18.**

[3] SORIA LORENTE, ANIER. *Aproximaciones simultáneas e irracionalidad de los valores de la función zeta de Riemann.* Universidad Carlos III de Madrid, tesis doctoral. Noviembre de 2012. **93 p.**

[4] SORIA, L. & GONZÁLEZ A., Y OTROS. *Algunas representaciones en series de la función zeta de Riemann en argumentos impares.* Lecturas Matemáticas, Volumen 37. 2016. **Pags. 25-33.**

[5] R. AYOUB. *Euler and the zeta function.* Amer. Math. Monthly 81 (1974) **Pags. 1067-1086**.

[6] BOO, R. C. *An Elementary proof of* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2} = \pi^2/6$. Amer. Math. Monthly 94 (1987) **Pags. 662-663**.

[7] STARK, E. L. *The series* $\sum_{n=1}^{\infty} k^{-s}, s = 2, 3, 4, \ldots$ *once more.* Math. Magazine 47 (1974) **Pags. 197-202**.

[8] EWELL, J. *A new series representation for* $\zeta(3)$. Amer. Math. Monthly 97 (3), (1990) **Pags. 219-220**.

[9] WIRDEL, MARCELA *La Funcion Z de Riemann.* PDF de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Palermo. **Pags. 1-14**.

[10] USECHE, HORACIO. 2017. *La Funcion Z de Riemann.* PDF, publicado en facebook. **11 p**.

SITIOS WEB

[11] https://es.wikipedia.org

[12] http://computerhoy.com/

[13] http://www.ams.org/

[14] http://www.m4t.es/index.php

[15] http://diarium.usal.es/guillermo